PELENGKAPAN RUANG BERNORMA

Oleh :

Ristina Noviandari
NIM. 033114016

ABSTRAK

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana membentuk pelengkapan ruang bernorma dari suatu ruang bernorma yang tidak lengkap.

Ruang bernorma adalah ruang vektor yang dilengkapi dengan suatu norma. Ruang bernorma ada yang lengkap dan ada yang tidak lengkap. Ruang bernorma E dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy pada ruang bernorma E konvergen di E. Sebaliknya, jika ada barisan Cauchy pada ruang bernorma E yang tidak konvergen di E maka ruang bernorma tersebut dikatakan tidak lengkap. Dari suatu ruang bernorma yang tidak lengkap dapat dibentuk menjadi ruang bernorma yang lengkap yaitu dengan pelengkapan ruang bernorma. Pelengkapan ruang bernorma dilakukan dengan cara (i) membentuk $\left(\hat{E}, \|\cdot\|_1\right)$ dengan $\hat{E}$ merupakan himpunan semua kelas ekuivalensi barisan Cauchy pada ruang bernorma E dan norma $\|\cdot\|_1$ didefinisikan oleh $\|[\{x_n\}]\|_1 = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|$, (ii) membentuk suatu pemetaan linier satu-satu $\Phi : E \to \hat{E}$, (iii) membuktikan bahwa $\|\Phi(x)\|_1 = \|x\|$ untuk setiap $x \in E$, (iv) membuktikan bahwa $\Phi(E)$ rapat (*dense*) di $\hat{E}$ dan (v) membuktikan bahwa $\hat{E}$ lengkap.

Salah satu contoh ruang bernorma yang lengkap adalah ruang bernorma $(C[a,b], \|\cdot\|)$ dengan $\|\cdot\|$ didefinisikan oleh $\|f\| = maks\,|f(x)|$ untuk setiap $f \in C[a,b]$. Sedangkan ruang bernorma $(C[0,1], \|\cdot\|)$ dengan $\|\cdot\|$ didefinisikan oleh $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|dx$ untuk setiap $f \in C[0,1]$ adalah contoh ruang bernorma yang tidak lengkap. Ruang bernorma $(C[0,1], \|\cdot\|)$ tersebut dapat dibentuk menjadi ruang bernorma yang lengkap yaitu ruang bernorma $(\hat{C}[0,1], \|\cdot\|_1)$ dengan $\hat{C}[0,1]$ merupakan himpunan semua kelas ekuivalensi barisan Cauchy di $C[0,1]$ dan norma $\|\cdot\|_1$ didefinisikan oleh $\|[\{f_n\}]\|_1 = \lim_{n\to\infty}\|f_n(x)\| = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n(x)|dx$.